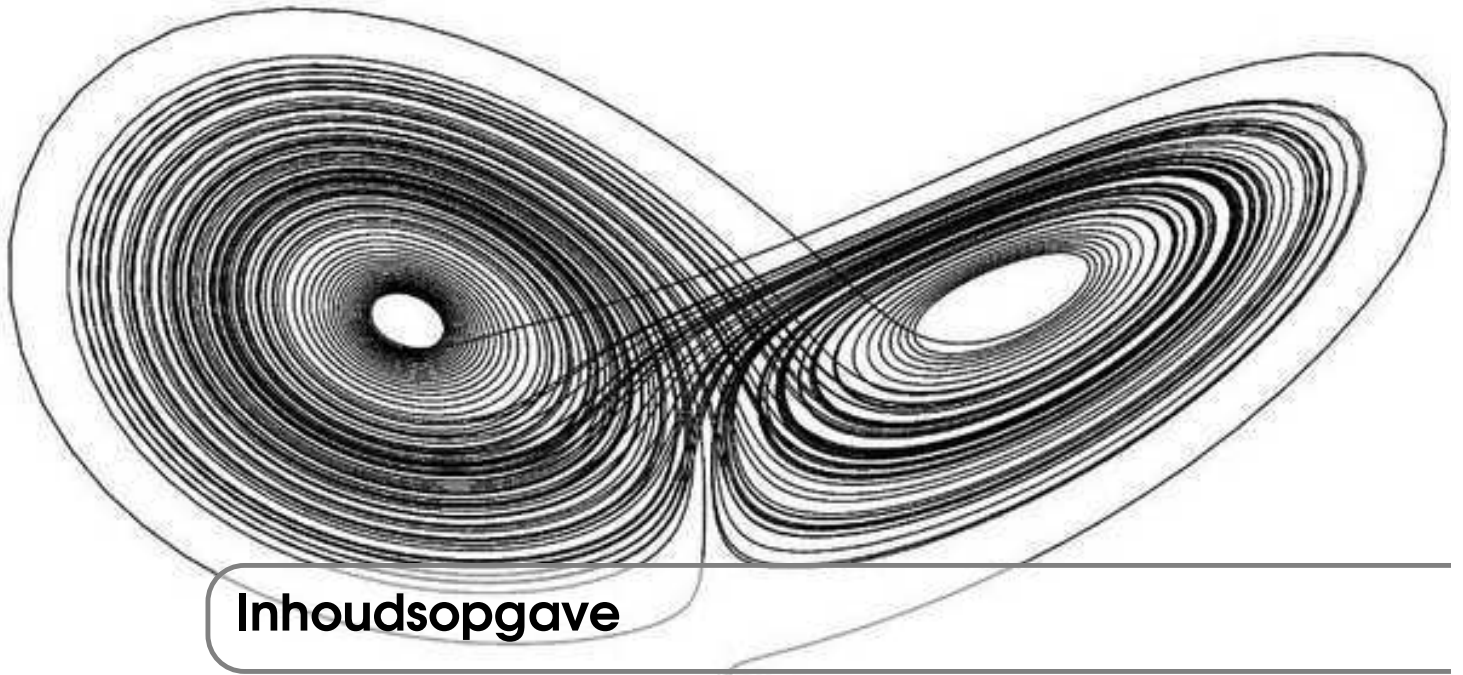


# WISKUNDE 2

Lesgever: P. Audenaert  
Auteur: T. Van Hecke

Opleiding  
Academiejaar 2019–2020





# Inhoudsopgave

<b>1 Ruimte meetkunde</b>	<b>3</b>
<b>1.1 Vergelijking van een vlak</b>	<b>3</b>
1.1.1 Het vlak bepaald door een punt en twee richtingsvectoren . . . . .	3
1.1.2 Het vlak bepaald door een punt en een normaalvector . . . . .	4
<b>1.2 Vergelijking van een rechte</b>	<b>5</b>
1.2.1 De rechte bepaald door een punt en een richtingsvector . . . . .	5
1.2.2 De rechte als snijlijn van 2 vlakken . . . . .	6
<b>1.3 Onderlinge stand van rechten en vlakken</b>	<b>6</b>
1.3.1 Onderlinge stand van twee vlakken . . . . .	6
1.3.2 Onderlinge stand van een rechte en een vlak . . . . .	6
1.3.3 Onderlinge stand van twee rechten . . . . .	7
<b>1.4 Hoeken</b>	<b>7</b>
1.4.1 Hoek tussen twee rechten . . . . .	7
1.4.2 Hoek tussen twee vlakken . . . . .	7
1.4.3 Hoek tussen een rechte en vlak . . . . .	7
<b>1.5 Afstanden</b>	<b>8</b>
1.5.1 Afstand van een punt tot een vlak . . . . .	8
1.5.2 Afstand van een punt tot een rechte . . . . .	9
1.5.3 Afstand tussen twee rechten . . . . .	10
<b>1.6 Gemeenschappelijke loodlijn van 2 rechten</b>	<b>11</b>
<b>1.7 Het boloppervlak</b>	<b>12</b>
<b>1.8 De cirkel in de ruimte</b>	<b>13</b>
1.8.1 Middelpunt en straal van de cirkel . . . . .	13
1.8.2 Cirkel door drie niet-collineaire punten . . . . .	14

<b>1.9</b>	<b>Classificatie van tweedegraadsoppervlakken in de ruimte</b>	<b>15</b>
1.9.1	De ellipsoïde	15
1.9.2	De hyperboloïde	15
1.9.3	De paraboloid	16
1.9.4	De kegel	17
1.9.5	Het cilinderoppervlak	17
1.9.6	Ontaarde gevallen	18
<b>1.10</b>	<b>Coördinatenstelsels in de ruimte</b>	<b>18</b>
1.10.1	Cartesische coördinaten (Ca.Co.)	18
1.10.2	Cilindercoördinaten (Ci.Co.)	18
1.10.3	Bolcoördinaten	19
1.10.4	Omzettingsformules	19
<b>2</b>	<b>Functies van meerdere variabelen</b>	<b>21</b>
<b>2.1</b>	<b>Enkele basisbegrippen en definities</b>	<b>21</b>
<b>2.2</b>	<b>Partieel afleiden</b>	<b>22</b>
2.2.1	Partiële afgeleiden van de eerste orde	22
2.2.2	Partiële afgeleiden van hogere orde	23
2.2.3	Totale differentiaal van eerste orde	23
2.2.4	Hogere orde totale differentiaal	23
<b>2.3</b>	<b>Meetkundige betekenis van de totale differentiaal</b>	<b>24</b>
<b>2.4</b>	<b>Berekeningswijze voor <math>y'</math></b>	<b>24</b>
<b>2.5</b>	<b>Gradiënt</b>	<b>25</b>
2.5.1	Eigenschappen van gradiënt	26
2.5.2	Vergelijking van raakvlak en normaal in een punt van een oppervlak	27
2.5.3	Vergelijking van raaklijn en normaalvlak in een punt van een kromme	28
<b>2.6</b>	<b>Extrema van een functie van twee veranderlijken</b>	<b>28</b>
<b>2.7</b>	<b>Gebonden extremum</b>	<b>30</b>
<b>3</b>	<b>Dubbelintegralen</b>	<b>31</b>
<b>3.1</b>	<b>Definities</b>	<b>31</b>
<b>3.2</b>	<b>Eigenschappen en stellingen</b>	<b>32</b>
<b>3.3</b>	<b>Berekening van een dubbelintegraal</b>	<b>33</b>
<b>3.4</b>	<b>Verwisselen van integratievolgorde</b>	<b>34</b>
<b>3.5</b>	<b>Coördinatentransformaties voor een dubbelintegraal</b>	<b>35</b>
3.5.1	Overgang van cartesische coördinaten naar poolcoördinaten	36
<b>3.6</b>	<b>Uitbreiding</b>	<b>37</b>
<b>3.7</b>	<b>Toepassingen</b>	<b>37</b>
3.7.1	Oppervlakte van een vlak gebied	37
3.7.2	Inhoud van een lichaam	37
3.7.3	Oppervlakte van een oppervlak (complanatie)	38
3.7.4	Traagheidsmoment en statisch moment van een vlak homogeen gebied	39
3.7.5	Zwaartepunt	40
<b>4</b>	<b>Basisbegrippen differentiaalvergelijkingen</b>	<b>41</b>

12.10	Lineaire Algebra	133
<hr/>		
4.1	Inleidende voorbeelden	41
4.2	Definities	42
4.3	Soorten oplossingen en hun meetkundige betekenis	43
4.4	De differentiaalvergelijking van een familie krommen	44
5	DVG van eerste orde en eerste graad	45
5.1	Scheiden van de veranderlijken	45
5.2	Homogene differentiaalvergelijkingen	46
5.3	Totale differentiaalvergelijkingen	47
5.3.1	Fysische toepassing	49
5.4	Lineaire differentiaalvergelijkingen	50
5.5	Differentiaalvergelijkingen van Bernoulli	51
5.5.1	Fysische toepassing	51
6	DVG van eerste orde en niet van eerste graad	53
6.1	DVG oplosbaar naar $y'$	53
6.2	DVG oplosbaar naar $y$	53
6.3	DVG oplosbaar naar $x$	54
7	Toepassingen	55
7.1	Orthogonale krommenbundels	55
7.2	Fysische toepassingen	55
8	Differentiaalvergelijking van hogere orde	57
8.1	DVG van het type $y^{(n)} = f(x)$	57
8.2	Tweede orde DVG die $y$ niet expliciet bevat: $F(x, y', y'') = 0$	57
8.3	Tweede orde DVG die $x$ niet expliciet bevat $F(y, y', y'') = 0$	58
8.4	Fysische toepassing	58
9	Lineaire differentiaalvergelijking	59
9.1	Definities en notaties	59
9.2	Samenstellen van de algemene oplossing	60
9.3	Lineaire DVG van orde 2 met constante reële coëfficiënten	61
9.3.1	Algemene oplossing van een homogene lineaire differentiaalvergelijking van orde 2 met constante reële coëfficiënten	61
9.3.2	Bepalen van een particuliere oplossing van een lineaire differentiaalvergelijking van orde 2 met constante reële coëfficiënten en specifiek rechterlid $Q(x)$	62
9.4	Fysische toepassing	66
10	Lineaire algebra	69
10.1	Inleiding	69
10.2	Matrices en determinanten	69
10.2.1	Algemene definities	69
10.2.2	Elementaire bewerkingen met matrices	70
10.2.3	Determinant van een vierkante matrix	73
10.2.4	Adjunctmatrix	74

12.10	Lineaire Algebra	134
10.2.5	Inverse van een vierkante matrix	75
10.2.6	Symmetrische, anti-symmetrische en hermitische matrices	76
<b>10.3</b>	<b>Lineaire stelsels</b>	<b>77</b>
10.3.1	Stelling van Rouché	78
10.3.2	Homogeen stelsel van lineaire vergelijkingen	80
10.3.3	Methode van Gauss voor het oplossen van lineaire stelsels	80
10.3.4	Methode van Gauss-Jordan voor het oplossen van lineaire stelsels	81
10.3.5	Gauss-Jordan methode om een reguliere matrix te inverteren	81
<b>10.4</b>	<b>Lineaire transformaties</b>	<b>82</b>
10.4.1	Vectorruimte en basis	82
10.4.2	Stellingen	83
10.4.3	Lineaire transformaties	84
<b>10.5</b>	<b>Eigenwaarden en eigenvectoren</b>	<b>87</b>
10.5.1	Bepaling van eigenwaarden en bijhorende eigenvectoren	87
10.5.2	Diagonaliseren van een <b>reële, symmetrische</b> matrix	92
10.5.3	Toepassingen op eigenwaarden en eigenvectoren	93
<b>11</b>	<b>Oefeningen</b>	<b>101</b>
11.1	Ruimte meetkunde	101
11.2	Functies van meerdere variabelen	104
11.3	Dubbelintegralen	106
11.4	Basisbegrippen differentiaalvergelijkingen	108
11.5	DVG van de eerste orde en de eerste graad	109
11.6	DVG van de eerste orde en niet van de eerste graad	110
11.7	Toepassingen	111
11.8	Differentiaalvergelijkingen van hogere orde	112
11.9	Lineaire DVG met constante, reële coëfficiënten	113
11.10	Lineaire Algebra	114
<b>12</b>	<b>Antwoorden</b>	<b>119</b>
12.1	Ruimte meetkunde	119
12.2	Functies van meerdere variabelen	120
12.3	Dubbelintegralen	122
12.4	Basisbegrippen differentiaalvergelijkingen	124
12.5	DVG van de eerste orde en de eerste graad	124
12.6	DVG van de eerste orde en niet van de eerste graad	125
12.7	Toepassingen	125
12.8	Differentiaalvergelijking van hogere orde	126
12.9	Lineaire DVG met constante reële coëfficiënten	126
12.10	Lineaire Algebra	127